

# Conception de Contrôleurs Basés sur des Observateurs pour la Stabilisation des Systèmes Modélisés par des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) Non Linéaires Couplées

ILYAS LAMRANI

## Contexte et Justification

Dans de nombreux modèles réels, les systèmes sont modélisés par des équations aux dérivées partielles (EDP), en particulier des EDP non linéaires couplées, ce qui complexifie la tâche de stabilisation par retour d'état, surtout lorsque certains états du système ne sont pas directement mesurables. Un observateur d'état est donc nécessaire pour estimer ces états et permettre un contrôle efficace. Les contrôleurs basés sur des observateurs sont souvent utilisés pour stabiliser des systèmes instables ou pour améliorer les performances des systèmes. Bien que le problème de stabilisation basé sur des observateurs pour les systèmes linéaires soit bien étudié, il y a très peu de travaux sur les EDP non linéaires couplées.

## Objectifs du Projet

1. **Développer une Théorie Approfondie** : Établir un cadre théorique complet pour la conception d'observateurs et de contrôleurs basés sur des observateurs pour les systèmes modélisés par des EDP non linéaires couplées.
2. **Concevoir des Algorithmes Innovants** : Proposer des algorithmes innovants pour la conception d'observateurs et de contrôleurs spécifiquement adaptés aux EDP non linéaires couplées.
3. **Valider les Méthodes Théoriques** : Utiliser des simulations numériques pour valider les résultats théoriques sur des problèmes de référence et des applications réelles.

## Description du Système

Considérons le système modélisé par des EDP non linéaires couplées suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1(t, \xi)}{\partial t} &= A_1 x_1(t, \xi) + B_1 u_1(t, \xi) + F_1(x_1(t, \xi), x_2(t, \xi), \xi), \\ \frac{\partial x_2(t, \xi)}{\partial t} &= A_2 x_2(t, \xi) + B_2 u_2(t, \xi) + F_2(x_1(t, \xi), x_2(t, \xi), \xi), \\ y(t, \xi) &= C(x_1(t, \xi), x_2(t, \xi)), \\ x_1(0, \xi) &= x_{1,0}(\xi), \quad x_2(0, \xi) = x_{2,0}(\xi),\end{aligned}$$

où :

- $x_1(t, \xi)$  et  $x_2(t, \xi)$  sont les vecteurs d'état dépendant du temps  $t$  et de la variable spatiale  $\xi$ ,
- $y(t, \xi)$  est le vecteur de sortie,
- $u_1(t, \xi)$  et  $u_2(t, \xi)$  sont les vecteurs d'entrée,
- $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1$ , et  $C_2$  sont des opérateurs linéaires définis sur un espace fonctionnel approprié,
- $F_1(x_1, x_2, \xi)$  et  $F_2(x_1, x_2, \xi)$  représentent le couplage non linéaire.

Pour estimer les états du système, nous utilisons deux observateurs  $\hat{x}_1(t, \xi)$  et  $\hat{x}_2(t, \xi)$  ainsi que deux opérateurs de gain, dépendants du temps et des états estimés  $K_1(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$  et  $K_2(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ . L'erreur d'estimation  $e(t, \xi) = (\hat{x}_1(t, \xi) - x_1(t, \xi), \hat{x}_2(t, \xi) - x_2(t, \xi))$

L'objectif est de trouver  $K_1(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$  et  $K_2(t, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$  tels que  $e_1(t, \xi)$  et  $e_2(t, \xi)$  tendent asymptotiquement vers zéro.

## Innovations et Défis

1. **Systèmes Infini-Dimensionnels et Non Linéaires** : La modélisation par des EDP non linéaires couplées représente un défi majeur en raison de la complexité des opérateurs impliqués.
2. **Approches Numériques Avancées** : Utiliser des méthodes numériques avancées pour résoudre les EDP non linéaires et valider les contrôleurs basés sur des observateurs.
3. **Techniques Adaptatives et Basées sur l'Apprentissage** : Intégrer des techniques d'apprentissage automatique et de contrôle adaptatif pour concevoir des observateurs capables de s'adapter aux dynamiques changeantes des systèmes.

## Méthodologie Proposée

Pour aborder ces défis, la recherche explorera les méthodologies suivantes :

1. **Techniques Basées sur la Théorie de Lyapunov** : Utiliser la théorie de la stabilité de Lyapunov pour dériver les conditions de stabilité du contrôleur basé sur des observateurs pour les EDP non linéaires.
2. **Méthodes Numériques** : Développer et utiliser des méthodes numériques efficaces pour la résolution des EDP non linéaires et l'implémentation des contrôleurs basés sur des observateurs.
3. **Contrôle Adaptatif** : Développer des contrôleurs basés sur des observateurs adaptatifs capables d'ajuster le gain  $K(t, \hat{x})$  en temps réel en fonction des performances observées du système.
4. **Simulations Numériques** : Valider les résultats théoriques à l'aide de simulations numériques sur des problèmes de référence et des applications réelles.

## Références

1. Krstic, Miroslav, Luke Bhan, and Yuanyuan Shi (2024). Neural operators of backstepping controller and observer gain functions for reaction-diffusion PDEs. *Automatica* 164 : 111649.
2. Krstic, M., & Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary Control of PDEs: A Course on Backstepping Designs*. SIAM.
3. Meurer, T. (2012). *Control of Higher-Dimensional PDEs: Flatness and Backstepping Designs*. Springer.
4. Prieur, C., & Vazquez, R. (2019). Robust nonlinear control of a class of coupled hyperbolic and parabolic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(5), 1905-1919.

## Résultats Attendus

La recherche vise à atteindre les résultats suivants :

1. **Cadre Théorique** : Développer un cadre théorique complet pour le contrôle basé sur des observateurs des systèmes modélisés par des EDP non linéaires couplées.
2. **Algorithmes Novateurs** : Proposer des algorithmes novateurs pour la conception d'observateurs et de contrôleurs.
3. **Résultats de Simulation** : Fournir des résultats de simulation étendus pour démontrer l'efficacité des méthodes proposées.